Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Fišer

Osnovna svojstva unitarnih prostora

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Fišer

Osnovna svojstva unitarnih prostora

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović
Komentor: dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2019.

Sažetak

U ovom završnom radu proučavat ćemo osnovna svojstva unitarnih prostora. Definirat ćemo Gramovu determinantu kojom karakteriziramo linearnu nezavisnost skupa vektora. Zatim ćemo objasniti Gram – Schmidtov postupak ortogonalizacije vektora i na kraju upoznati se s unitarnim operatorom.

Ključne riječi

Unitarni prostor, Gramova determinanta, skalari, vektori, ortogonalizacija, unitarni operatori

Basic properties of unitary spaces

Summary

In this final paper, we will study the basic properties of an unitary space. We will define the Gram determinant which characterizes linear independence of a set of vectors. Then we will explain the Gram-Schmidt orthogonalization procedure and introduce an unitary operator.

Key words

Unitary space, the Gram determinant, scalars, vectors, orthogonalization, unitary operators

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Skalarni produkt i unitarni prostor

Neka je U unitarini prostor nad poljem K. U ovom radu K će predstavljati polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva ili polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ se zove realan vektorski prostor, a nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksan vektorski prostor.

Definicija 1 ***Skalarni produkt*** *na vektorskom prostoru U je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : U \times U \to K$ (svakom uređenom paru $(x, y) \in U \times U$ je pridružen skalar$(x, y) \in K$) sa svojstvima:*

(1) *aditivnost u prvom argumentu:* $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y) \qquad (x_1, x_2, y \in U)$,

(2) *homogenost u prvom argumentu:* $(\alpha x|y) = \alpha(x|y) \qquad (x, y \in U, \alpha \in K)$,

(3) *konjugirana simetričnost:* $(x|y) = \overline{(y|x)} \qquad (x, y \in U)$,

(4) *nenegativnost:* $(x|x) \geqslant 0 \qquad (x \in U)$,

(5) *(pozitivna) definitnost:* $(x|x) = 0$ *onda i samo onda, kada je* $x = 0$.

Vektorski prostor nad kojim je definiran skalarni produkt naziva se ***unitarni prostor****.*

Uvjeti (1) i (2) znače da je $(\cdot|\cdot)$ linearni funkcional u prvoj varijabli, tj.

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|y) = \alpha_1(x_1|y) + \alpha_2(x_2|y).$$

Iz uvjeta (3) slijedi da je $(\cdot|\cdot)$ antilinearan funkcional u drugoj varijabli, tj.

$$(x|\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \overline{(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2|x)} = \overline{\beta_1 (y_1|x)} + \overline{\beta_2 (y_2|x)} = \overline{\beta_1}(x|y_1) + \overline{\beta_2}(x|y_2).$$

Primjer 1 *Neka je f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija zadana s*

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Pokažite da je f skalarni produkt.
Rješenje:
Provjerimo zadovoljava li f sva svojstva skalarnog produkta:
(1) nenegativnost:

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0.$$

(2) definitnost:

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \text{ akko } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \text{ akko } x_i^2 = 0, \forall i, \text{ akko } x_i = 0, \forall i = 1, \dots n.$$

(3) linearnost:

$$f(\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_i z_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$
$$= \alpha f((x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)) + \beta f((y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \cdots, z_n)).$$

(4) konjugirana simetričnost:
Vrijedi li $f((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = f((y_1, y_2, \ldots, y_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *?*
Vrijedi da je $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i$ *(zbog komutativnosti množenja u* $\mathbb{R}$*), pa* f *zadovoljava svojstvo konjugirane simetričnosti.*

Primjer 2 *Neka je* $U = K^n$ *za neki* $n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$ *fiksni skalari,* $v = (v_1, \cdots, v_n), w = (w_1, \cdots, w_n) \in U$.

$$(v|w) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \overline{w_j}$$

$(\cdot|\cdot)$ *je skalarni produkt na* K^n*. Za* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ *ovo je standardni skalarni produkt na* K^n.

Primjer 3 *Neka je* $U = M_n(K)$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$*, gdje je* $M_n(K)$ *vektorski prostor svih kvadratnih matrica reda* n *nad poljem* K*. Za* $A, B \in U$ *definiramo*

$$(A|B) := tr(AB^*),$$

gdje je $B^* = \overline{B^T}$ *matrica adjungirana matrici* B*.* $(\cdot|\cdot)$ *je skalarni produkt na* $M_n(K)$*. Naime, za matrice* $A = [\alpha_{ij}], B = [\beta_{ij}]$ *imamo* $(A|B) = tr([\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{\beta_{jk}}]) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}\overline{\beta_{jk}}$ *pa je unitarni prostor* $M_n(K)$ *prirodno izomorfizan unitarnom prostoru* K^{n^2} *uz standardni skalarni produkt (*n^2*-torke iz* K^{n^2} *možemo poistovjetiti s* $n \times n$ *matricama).*

Teorem 1 *Neka je* U *unitaran prostor. Za* $u \in U$ *stavimo* $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ *(nenegativan drugi korijen). Tada funkcija* $u \mapsto \|u\|$ *s vektorskog prostora* U *u skup* $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ *ima sljedeća svojstva:*

(1) za $u \in U$ *vrijedi da je* $\|u\| = 0$ *akko* $u = 0$,
(2) za $u \in U$ *i* $\alpha \in K$ *vrijedi* $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$,
(3) vrijedi ***nejednakost trokuta****, tj.* $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|, \forall u_1, u_2 \in U$.

Nadalje, za bilo koja dva vektora $u_1, u_2 \in U$ *vrijedi* ***Cauchy-Schwarz-Bunyakowskyjeva nejednakost****:*

$$|(u_1|u_2)| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su u_1 *i* u_2 *linearno zavisni.*

Dokaz:

Svojstvo (1) neposredna je posljedica definitnosti skalarnog produkta.
Svojstvo (2) posljedica je linearnosti i konjugirane simetričnosti:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x|x) = |\lambda|^2\|x\|^2.$$

Dokažimo sada C-S-B nejednakost. Za vektore $u_1, u_2 \in U$ zbog pozitivnosti norme, linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli i hermitske simetrije imamo redom:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1\|^2 = \big((u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1\big|(u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1\big) \\
&= \big((u_1|u_1)u_2\big|(u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1\big) - \big((u_2|u_1)u_1\big|(u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1\big) \\
&= (u_1|u_1)\overline{(u_1|u_1)}(u_2|u_2) - (u_1|u_1)\overline{(u_2|u_1)}(u_2|u_1) - (u_2|u_1)\overline{(u_1|u_1)}(u_1|u_2) \\
&\quad + (u_2|u_1)\overline{(u_2|u_1)}(u_1|u_1) = \|u_1\|^2\|u_1\|^2\|u_2\|^2 - \|u_1\|^2\overline{(u_1|u_2)}(u_1|u_2) \\
&= \|u_1\|^2(\|u_1\|^2\|u_2\|^2 - |(u_1|u_2)|^2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|u_1\|^2(\|u_1\|^2\|u_2\|^2 - |(u_1|u_2)|^2) \geq 0$
Ako je $u_1 = 0$, onda vrijedi da je $|(u_1|u_2)| = \|u_1\|\|u_2\|$, jer su obje strane nula. Ako je $u_1 \neq 0$, vrijedi da je $\|u_1\|^2 > 0$, pa dijeljenjem gornje nejednakosti s $\|u_1\|^2$ dobivamo:

$$\|u_1\|^2\|u_2\|^2 - \big|(u_1|u_2)\big|^2 \geq 0,$$

$$\|u_1\|^2\|u_2\|^2 \geq |(u_1|u_2)|^2.$$

Jednakost vrijedi akko

$$(u_1|u_1)u_2 - (u_2|u_1)u_1 = 0,$$

tj.

$$(u_1|u_1)u_2 = (u_2|u_1)u_1 \quad / : (u_1|u_1)$$

$$u_2 = \frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1,$$

tj. ako i samo ako su u_1 i u_2 linearno zavisni.
Pokažimo sada nejednakost trokuta, tj. $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|, \forall u_1, u_2 \in U$:

$$\begin{aligned}
\|u_1 + u_2\|^2 &= (u_1 + u_2|u_1 + u_2) = (u_1|u_1) + (u_1|u_2) + (u_2|u_1) + (u_2|u_2) \\
&= \|u_1\|^2 + (u_1|u_2) + \overline{(u_1|u_2)} + \|u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u_1|u_2) + \|u_2\|^2 \\
&\leq \|u_1\|^2 + 2\big|(u_1|u_2)\big| + \|u_2\|^2 \leq \|u_1\|^2 + 2\|u_1\|\|u_2\| + \|u_2\|^2 \\
&= \big(\|u_1\| + \|u_2\|\big)^2.
\end{aligned}$$

□

Funkciju $u \mapsto \|u\|$ definiranu na vektorskom prostoru U i s vrijednostima u skupu $\mathbb{R}_+$ koja ima svojstva (1), (2), (3) iz prethodnog teorema nazivamo **norma**, a vektorski prostor na kojem je norma definirana nazivamo **normirani prostor**.

Ako je U normiran prostor s normom $\|\cdot\|$ postavlja se pitanje da li je možda ta norma dobivena iz nekog skalarnog produkta na prostoru U. Vrlo jednostavan odgovor na to pitanje, kojeg navodimo bez dokaza, vezan je uz jednu geometrijsku jednakost, koja vrijedi za bilo koji paralelogram u ravnini: zbroj kvadrata duljina stranica pralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina njegovih dviju dijagonala.

Teorem 2 ***(Jordan - Neumann)*** *Neka je U normiran prostor s normom $x \mapsto \|x\|$. Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

(1) *Postoji skalarni produkt (x,y) $\mapsto (x|y)$ na U takav da je $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.*

(2) *Za bilo koje x,y $\in$ U vrijedi tzv.* ***jednakost paralelograma****:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

U tom slučaju skalarni produkt sa svojstvom $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ je jedinstven i u slučaju polja $K = \mathbb{R}$ zadan je s:

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

a u slučaju $K = \mathbb{C}$ s:

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

Kada god imamo normu $\|\cdot\|$ na vektorskom prostoru U smisleno je definirati i preslikavanje $d : U \times U \to \mathbb{R}$ formulom $d(x,y) = \|x-y\|$. Prirodno je ovakvo preslikavanje shvaćati kao razdaljinsku funkciju ili metriku na U, tj. funkciju koja mjeri udaljenost elemenata x i y. Zaista $d(x,y)$ ima sva razumna svojstva koja intuitivno očekujemo da vrijede, naime:

(1) $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in U,$

(2) $d(x,y) = 0$ onda i samo onda ako je $x = y$,

(3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in U,$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in U.$

Napomena 1 *Skup U na kojem je zadana funkcija d koja svakom uređenom paru $(x,y) \in U$ pridružuje realan broj $d(x,y)$ s navedenim svojstvima, zove se* ***metrički prostor****.*

2 Gramova matrica

Skalarni produkt u unitarnom prostoru omogućava da ispitamo je li neki skup vektora linearno zavisan ili nije. Pokažimo kako se to radi.

Neka je zadan konačan skup vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz unitarnog prostora U. Da bismo ispitali linearnu zavisnost toga skupa, moramo promatrati relaciju

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \tag{1}$$

i vidjeti je li (1) moguće zadovoljiti na netrivijalan način. Pomnožimo li (1) skalarno zdesna s x_k, imamo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n | x_k) = 0,$$

tj.

$$\alpha_1 (x_1 | x_k) + \alpha_2 (x_2 | x_k) + \cdots + \alpha_n (x_n | x_k) = 0 \text{ za } k = 1, 2 \ldots n. \tag{2}$$

Sada je (2) homogen sustav od n linearnih jednadžbi s nepoznanicama $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Matrica koeficijenata (točnije transponirana matrica) tog sistema je

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \ldots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \ldots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \ldots & (x_n|x_n) \end{bmatrix}.$$

U prvom retku te matrice dolazi skalarni produkt vektora x_1 s vektorima $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tim redom, u drugom retku produkt vektora x_2 s $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tim redom, itd.

Definicija 2 *Za svakih n vektora unitarnog prostora matrica $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ potpuno je određena i zove se **Gramova matrica** vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determinanta matrice $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zove se **Gramova determinanta** vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i označava $\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.*

Teorem 3 *Neka je U unitaran prostor, vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz U su linearno nezavisni akko je $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, tj. Gramova matrica je regularna. U tom slučaju je $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$.*

Dokaz:

Pretpostavimo da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno zavisni i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalari (od kojih je barem jedan različit od nule) takvi da je $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$. Tada za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi:

$$0 = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k | x_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k | x_j).$$

To znači da sljedeći homogen sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ima netrivijalno rješenje:

$$\begin{array}{c} \lambda_1(x_1|x_1) + \cdots + \lambda_n(x_n|x_1) = 0 \\ \lambda_1(x_1|x_2) + \cdots + \lambda_n(x_n|x_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1(x_1|x_n) + \cdots + \lambda_n(x_n|x_n) = 0 \end{array} \tag{3}$$

To znači da je matrica tog sustava singularna. No, matrica sustava (3) je upravo transponirana matrica matrice $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Time smo dokazali da iz linearne zavisnosti vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slijedi da je matrica $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ singularna.

Pretpostavimo sada da je matrica $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ singularna. Tada je i transponirana matrica singularna, što znači da sustav (3) ima netrivijalno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (dakle, $\lambda_i \neq 0$, za barem jedan i). Stavimo

$$y = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k.$$

Sustav jednadžbi (3) može se kraće zapisati ovako

$$(y|x_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

To znači da je $y \perp [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$. Međutim, $y \in [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$, pa slijedi $y \perp y$, odnosno $(y|y) = 0$. No to je moguće samo ako je $y = 0$, tj. $y = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k = 0$. To pokazuje da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno zavisni.

Dokazali smo da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno zavisni ako i samo ako je singularna njihova Gramova matrica $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ekvivalentno, vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su linearno nezavisni ako i samo ako je njihova Gramova matrica $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ regularna. Pokažimo još pozitivnost Gramove determinante. Pretpostavimo da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno nezavisni. Stavimo

$$x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \alpha_k x_k,$$

pri čemu je α_k determinanta matrice $n-1$ reda, koja se iz Gramove matrice $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dobije tako da se izbriše k-ti redak i n-ti stupac. Vektor x možemo shvatiti kao razvoj po n-tom stupcu determinante matrice koja se iz $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dobije tako da se zadnji stupac zamijeni stupcem vektora

$x_1, x_2, \dots, x_n$ na sljedeći način:

$$x = det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{n-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{n-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_3|x_{n-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_{n-1}|x_{n-1}) & x_n \end{bmatrix}.$$

Posebno, primijetimo da je $\alpha_n = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Uz uvedene oznake imamo

$$(x|x_j) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \alpha_k (x_k|x_j) = \Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pri čemu je $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznaka za determinantu matrice koja se iz Gramove matrice dobije tako da se zadnji stupac zamijeni j-tim stupcem iste matrice:

$$\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{n-1}) & (x_1|x_j) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{n-1}) & (x_2|x_j) \\ (x_3|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_3|x_{n-1}) & (x_3|x_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_{n-1}|x_{n-1}) & (x_n|x_j) \end{bmatrix}.$$

Za $1 \le j \le n-1$ u $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ su j-ti i n-ti stupac jednaki pa je $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Nadalje, $\Gamma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dakle, vrijedi

$$(x|x_j) = 0 \quad za \quad j = 1, \dots, n \quad i \quad (x|x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Odatle je

$$0 \le (x|x) = (x| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \alpha_k x_k) = \overline{\alpha_n}(x|x_n) = \overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Isto zaključivanje mogli smo provesti za vektore $x_1, x_2, \dots, x_n$ za bilo koji k. Dakle, vrijedi:

$$\overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k) \ge 0 \quad za \quad k = 2, \dots, n.$$

Vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ su linearno nezavisni, pa su sve determinante

$$\Gamma(x_1), \Gamma(x_1, x_2), \dots, \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

različite od nule. Budući da vrijedi $\Gamma(x_1) = \|x_1\|^2 > 0$, iz gornje nejednakosti za $k = 2$ slijedi $\Gamma(x_1, x_2) > 0$, odakle iz gornje nejednakosti za $k = 3$ slijedi $\Gamma(x_1, x_2, x_3) > 0$, i tako redom korak po korak sve do $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

$\square$

3 Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije vektora

U ovom poglavlju ćemo navesti Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije, te pokazati zašto ima smisla provoditi ovaj postupak. Prisjetimo se najprije osnovnih definicija.

Definicija 3 *Kažemo da su dva vektora x, y unitarnog prostora U* ***okomiti*** *i pišemo $x \perp y$, ako je $(x|y) = 0$. Također, dva skupa $U_0, U_1 \subseteq U$ su* ***okomiti*** *i pišemo $U_0 \perp U_1$, ako je $(x_0|x_1) = 0, \forall x_0 \in U_0, x_1 \in U_1$.*

Definicija 4 *Skup svih vektora iz U koji su okomiti na neki skup $U_0 \subseteq U$ zove se* ***ortogonalan komplement*** *skupa U_0 i označava s $U_0^\perp$.*

Primjer 4 *Neka je $S \subseteq U$. Tada je $S^\perp = \{u \in U : u \perp S\}$ potprostor od U.*
Rješenje:
Neka su $x, y \in S^\perp$. Tada je $(x|a) = 0$ i $(y|a) = 0, \forall a \in S$.
Neka su $\alpha, \beta \in K$ i $a \in S$ proizvoljni. Tada $(\alpha x + \beta y|a) = \alpha(x|a) + \beta(y|a) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$.
To znači da je $\alpha x + \beta y \in S^\perp$ što povlači da je $S^\perp$ potprostor od U.

Ako je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i U_0 potprostor, onda je $U_0^\perp$ također direktni komplement potprostora U_0, pa je $U_0 \dot{+} U_0^\perp = U$ (vidi Teorem 5).
Suma ovog tipa zove se **ortogonalna** i označava $\oplus$. Prema tome je $U = U_0 \oplus U_0^\perp$.
Općenito kažemo da je U **ortogonalna suma** potprostora $U_1, \dots, U_m$ i pišemo $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$, ako je $U = U_1 + \cdots + U_m$ i svaki vektor potprostora U_i ortogonalan je na svaki vektor potprostora U_j za $i \neq j$.

Primjetimo da je ortogonalni komplement potprostora U_0 jednoznačno određen tim potprostorom, dok to isto ne vrijedi za direktan komplement tog prostora. Ortogonalni komplement $U_0^\perp$ piše se također i kao

$$U_0^\perp = U \ominus U_0.$$

Definicija 5 *Kažemo da je vektor e* ***normiran*** *ili* ***jedinični vektor****, ako je $\|e\| = 1$.*

Definicija 6 *Skup vektora zove se* ***ortogonalan*** *ako su bilo koja dva vektora toga skupa međusobno okomita. Skup vektora zove se* ***ortonormiran*** *ako je on ortogonalan skup i ako je svaki njegov element normiran vektor. (Nenul vektor x normiramo tako da ga pomnožimo s $\frac{1}{\|x\|}$, tj. gledamo vektor $\frac{x}{\|x\|}$).*

3.1 Ortonormirana baza

Propozicija 1 *Neka je U unitaran prostor. Svaki ortogonalan skup u U koji ne sadrži nulvektor je linearno nezavisan. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.*

Dokaz:

Neka je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0,$$

gdje je $\{u_1, ..., u_k\}$ ortogonalan skup koji ne sadrži nulvektor. Pomnožimo ovu jednadžbu skalarno sa u_j za neki $j \in \{1, ..., k\}$. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli imamo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i | u_j) = 0,$$

odnosno

$$\alpha_1(u_1|u_j) + \cdots + \alpha_k(u_k|u_j) = 0.$$

Pretpostavili smo da je skup ortogonalan pa je u_j ortogonalan na sve u_i, $i \neq j$. To znači da od cijele sume ostane samo jedan član pa imamo

$$\alpha_j(u_j|u_j) = 0.$$

Sada koristimo da početni skup nije sadržavao nulvektor pa je $u_j \neq 0$, onda je i $(u_j|u_j) \neq 0$ zbog definicije skalarnog produkta. To znači da je nužno $\alpha_j \neq 0$. Ovdje je j bio proizvoljan pa slijedi da mora vrijediti $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, odnosno skup je linearno nezavisan.

□

Dakle, prvo korisno svojstvo koje smo dobili je linearna nezavisnost, ali od ortonormiranih skupova možemo dobiti puno više.

Pretpostavimo sada da unitarni prostor U ima ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (zasad još ne znamo da takva postoji za općeniti unitarni prostor U). Znamo da se svaki $x \in U$ može zapisati na jedinstven način u toj bazi, dakle

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

gdje su koeficijenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jedinstveno određeni skalari. Kada radimo općenito s bazom pronalazak tih skalara nije jednostavan posao, svodi se na $n \times n$ linearni sustav.

Međutim, ako imamo posla s ortonormiranom bazom dovoljno je izračunati n skalarnih produkata. Naime, imamo

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad /(\cdot|e_j) \\ (x|e_j) &= \alpha_j (e_j|e_j) \\ (x|e_j) &= \alpha_j, \end{aligned}$$

što znači da je svaki od koeficijenata upravo skalarni produkt danog vektora s odgovarajućim članom ortonormirane baze, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i.$$

Isto tako, skalarni produkt dva vektora možemo lijepo izraziti u ortonormiranoj bazi koristeći gornji prikaz. Neka su $x, y \in U$, imamo

$$\begin{aligned} (x|y) &= (\sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i | \sum_{j=1}^{n} (y|e_j) e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x|e_i) \overline{(y|e_j)} (e_i|e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x|e_i)(e_j|y) \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(e_i|y) \end{aligned}$$

Primijetimo da je ovo zapravo formula kojom smo računali standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, pri čemu je pripadna ortonormirana baza bila upravo ona kanonska, $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Ortonormiran skup koji je baza od U zove se **ortonormirana baza** od U.

Ako je $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza drugog unitarnog prostora V i $A \in L(U, V)$ gdje $L(U, V)$ označava skup svih linearnih operatora s U u V, sličan račun pokazuje da je element matrice $A(f, e)$ na presjecištu i-tog retka i j- tog stupca jednak $\alpha_{ij} = (Ae_j|f_i)$:

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} (Ae_1|e_1) & (Ae_2|e_1) & \ldots & (Ae_n|e_1) \\ (Ae_1|e_2) & (Ae_2|e_2) & \ldots & (Ae_n|e_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ (Ae_1|e_n) & (Ae_2|e_n) & \ldots & (Ae_n|e_n) \end{bmatrix}.$$

Teorem 4 *Neka je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormiran podskup unitarnog prostora U i neka je $x \in U$.*
(1) Vrijedi tzv. ***Besselova nejednakost***

$$\sum_{j=1}^{k} (x|e_j)^2 \leq \|x\|^2.$$

Pri tome vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $x \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$. U tom slučaju je

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x|e_j)e_j.$$

(2) Stavimo

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} (x|e_j)e_j.$$

Za svaki $y \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$, $y \neq x_0$, vrijedi stroga nejednakost

$$\|x - x_0\| < \|x - y\|.$$

Dakle, x_0 je jedinstvena najbolja aproksimacija vektora x iz potprostora razapetog vektorima $e_1, \dots, e_k$.

Dokaz teorema 4 se može naći u [3].

Teorem 5 *(teorem o ortogonalnoj projekciji) Neka je U unitarni prostor i V konačnodimenzionalan potprostor. Tada je $U = V \dot{+} V^{\perp}$. Drugim riječima, za svaki vektor $x \in U$ postoje jedinstveni vektori $y \in V$ i $z \in V^{\perp}$ takvi da je $x = y + z$. Nadalje, ako je U konačnodimenzionalan, vrijedi $V^{\perp\perp} = V$.*

Dokaz:

Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza od V. Za dani vektor $x \in U$ stavimo

$$y = \sum_{1 \leq k \leq n} (x|e_k)e_k \quad i \quad z = x - y, \quad dakle \quad x = y + z.$$

Tada je $y \in V$. Nadalje, za bilo koji $j \in \{1, \dots, n\}$ je

$$(z|e_j) = (x|e_j) - (\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k|e_j) = (x|e_j) - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)\delta_{kj} = 0,$$

dakle $z \perp [\{e_1, \dots, e_n\}] = V$. Treba još dokazati jedinstvenost takvih vektora. Ako pretpostavimo da su i $y' \in V$ i $z' \perp V$ takvi da je $x = y' + z'$, onda je $y + z = y' + z'$, dakle $y - y' = z' - z$. Označimo taj vektor s u. Tada $u = y - y'$ pokazuje da je $u \in V$, a $u = z' - z$ pokazuje da je $u \perp V$. No tada je $u \perp u$, dakle $(u|u) = 0$, odakle slijedi $u = 0$. Dakle, $y' = y$ i $z' = z$.

Dokažimo još posljednju tvrdnju. Prema dokazanom znamo da vrijedi $dimV^{\perp} = dimU - dimV$, a odatle

$$dimV^{\perp\perp} = dimU - dimV^{\perp} = dimU - (dimU - dimV) = dimV.$$

Kako je očito $V \subseteq V^{\perp\perp}$, slijedi $V^{\perp\perp} = V$.

$\square$

3.2 Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije

Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ konačan ili prebrojiv niz vektora iz unitarnog prostora U i neka je $[S]$ potprostor određen sa S, tj. skup svih linearnih kombinacija vektora iz S. Sada ćemo opisati postupak koji omogućava da se skup S ortonormira, tj. nadomjesti ortonormiranim skupom S_0 koji razapinje isti potprostor $[S]$. Taj se postupak naziva **Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije**.

Najprije navedimo teorem koji rješava pitanje egzistencije (pa i konstrukcije) ortonormirane baze u konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima:

Teorem 6 ***(Gram-Schmidt)*** *Neka je $x_1, x_2, \ldots$ konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz vektora u unitarnom prostoru U.*
(1) Postoji ortonormirani niz $e_1, e_2, \ldots \in U$ sa svojstvom da je

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}] = [\{e_1, \ldots, e_k\}], \forall k. \tag{4}$$

(2) Uz dodatni uvjet

$$(e_k, x_k) > 0, \forall k \tag{5}$$

ortonormirani niz iz tvrdnje (1) je jedinstven.

Dokaz:

$[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$ znači da je $e_1 = \alpha x_1$ za neki skalar α. Iz zahtjeva $\|e_1\| = 1$ slijedi da mora biti $|\alpha| = \dfrac{1}{\|x_1\|}$. Nadalje, $(e_1|x_1) = \alpha\|x_1\|^2$, pa dodatni zahtjev $(e_1|x_1) > 0$ znači da mora biti $\alpha > 0$. Dakle, $|\alpha| = \dfrac{1}{\|x_1\|}$, tj. $e_1 = \dfrac{1}{\|x_1\|}x_1$ je jedini jedinični vektor takav da je $[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$ i $(e_1|x_1) > 0$. Pretpostavimo da smo našli ortonormirane vektore $e_1, \ldots, e_k$ takve da vrijede (4) i (5) za $k = 1, 2, \ldots, n$. Dokazat ćemo sada da postoji jedinstven jedinični vektor e_{n+1} takav da vrijede (4) i (5) za $k = n + 1$. Na taj način će teorem 4 matematičkom indukcijom biti u potpunosti dokazan.
Zahtjev (4) za $k = n + 1$ znači da mora biti $e_{n+1} \in [\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}]$, a kako je po pretpostavci $[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$, to znači da mora biti $e_{n+1} \in [\{e_1, \ldots, e_n, x_{n+1}\}]$. Tražimo dakle vektor e_{n+1} u obliku

$$e_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Za $1 \leq k \leq n$ mora biti $0 = (e_{n+1}|e_k) = \alpha(x_{n+1}|e_k) + \alpha_k$, a to znači $\alpha_k = -\alpha(x_{n+1}|e_k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Prema tome,
$e_{n+1} = \alpha y$, gdje je $y = x_{n+1} - (x_{n+1}|e_1)e_1 - (x_{n+1}|e_2)e_2 - \cdots - (x_{n+1}|e_n)e_n$.
Vektor e_{n+1} je jedinični ako i samo ako je $|\alpha| = \dfrac{1}{\|y\|}$. Nadalje, imamo

$$(e_{n+1}|x_{n+1}) = \alpha(x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}|e_k)e_k|x_{n+1}) = \alpha[\|x_{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x_{n+1}|e_k)|^2].$$

Izraz u uglatoj zagradi je strogo pozitivan jer zbog linearne nezavisnosti vektor x_{n+1} nije u potprostoru $[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] = [\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}]$. Dakle $(e_{n+1}|x_{n+1}) > 0$ ako i samo ako je $\alpha > 0$. To znači da mora biti $\alpha = \frac{1}{\|y\|}$. Dakle, postoji jedan i samo jedan jedinični vektor e_{n+1} takav da vrijede (4) i (5) za $k = n+1$. To je vektor $e_{n+1} = \frac{1}{\|y\|}y$ pri čemu je $y = x_{n+1} - \sum_{1\le k\le n}(x_{n+1}|e_k)e_k$.

□

Za jedinstveni niz $e_1, e_2, e_3, \ldots$ iz tvrdnje (1) Teorema 5 kažemo da je iz niza $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dobiven **Gram - Schmidtovim postupkom ortonormiranja**.

Korolar 1 *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Tada postoji ortonormirana baza od U. Štoviše, svaki ortonormiran podskup od U sadržan je u nekoj ortonormiranoj bazi od U.*

Dokaz:

NEka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza prostora U i primjenimo Gram - Schmidtov postupak. Kako dobiveni ortonormirani skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uz ostalo zadovoljava $[\{e_1, \ldots, e_n\}] = [\{x_1, \ldots, x_n\}]$, pa je taj skup i baza za U.
Nadalje, neka je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ortonormiran podskup od U. Tada je taj skup linearno nezavisan, pa je sadržan u nekoj bazi $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ od U. Gram - Schmidtovim postupkom ortonormiranja dolazimo do ortonormirane baze $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ od U. Iz dokaza Teorema 4 i iz ortonormiranosti skupa $\{x_1, \ldots, x_k\}$ je jasno da je $e_1 = x_1, \ldots, e_k = x_k$. Dakle, ortonormiran skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ sadržan je u ortonormiranoj bazi $\{x_1, \ldots, x_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$.

□

Teorem 7 *Neka je $x_1, x_2, \ldots$ linearno nezavisan niz u unitarnom prostoru U. Jedinstveni ortonormiran niz $e_1, e_2, \ldots$ iz tvrdnje (2) Teorema 6 dan je formulama*

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1, \quad e_k = \frac{det\begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \ldots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \ldots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_1|x_2) & \ldots & (x_3|x_{k-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \ldots & (x_{k-1}|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)}}, \quad k \geq 2.$$

Dakle, za $k \geq 2$ je $e_k = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)}}y_k$, pri čemu je vektor y_k zadan kao determinanta matrice koja se iz Gramove matrice $G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dobije tako da se zadnji $(k-ti)$ stupac zamijeni stupcem vektora $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (preciznije, y_k je razvoj determinante po zadnjem stupcu).

Dokaz:

Neka su vektori y_k definirani kao u iskazu Teorema:

$$y_1 = x_1, \quad y_k = det\begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_3|x_{k-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \dots & (x_{k-1}|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix} za \quad k \geq 2.$$

U dokazu Teorema 3 vidjeli smo da je tada:

$$(y_k|x_j) = 0 \quad za \quad 1 \leq j \leq k-1; \qquad (y_k|x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k);$$
$$\|y_k\|^2 = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Vektor y_j je linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \dots, x_j$. Stoga je

$$[\{y_1, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, \dots, x_k\}].$$

Nadalje, za $j < k$ vektor y_j je linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \dots, x_j$, pa zbog $(y_k|x_i) = 0$ za $i < k$ slijedi $(y_k|y_j) = 0$. To pokazuje da su vektori niza $y_1, y_2, y_3, \dots$ međusobno ortogonalni. Kako je

$$(y_k, x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

to je $y_k \neq 0, \forall k$. Zaključujemo da su vektori $y_1, y_2, \dots$ linearno nezavisni, pa slijedi $dim[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] = k$. Zbog inkluzije $[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}]$ slijedi jednakost $[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] = [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}]$. Napokon, neka su $e_1, e_2, \dots$ vektori iz iskaza Teorema: $e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$. Tada je $e_1, e_2, e_3, \dots$ ortonormiran niz takav da $[\{e_1, e_2, \dots, e_k\}] = [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}], \forall k$ i

$$(x_k|e_k) = \frac{(x_k|y_k)}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} = \sqrt{\frac{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} > 0.$$

Time je Teorem 7 u potpunosti dokazan.

□

Primjer 5 *Vektor $a = 2e_1 - e_2 + e_3$ treba prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $x_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $x_2 = e_1 + e_2 - e_3$, $x_3 = e_1 - e_2 + e_3$.*
Rješenje:
Budući da je vektor

$$x = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & (x_1|x_3) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & (x_2|x_3) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & (x_3|x_3) & x_3 \\ (a|x_1) & (a|x_2) & (a|x_3) & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 & x_3 \\ 4 & -2 & 6 & a \end{vmatrix}$$

okomit na vektore x_1, x_2, x_3, tj. na bazu prostora, to je $x = 0$. Odavde je

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_2 - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} a = 0,$$

tj.

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2a = 0 \Rightarrow a = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3.$$

Primjer 6 *Provedimo prethodno opisan postupak ortonormiranja baze* $\{(1,1,1),(1,0,1),(2,0,0)\}$.
Rješenje:
Gledamo prvi vektor iz baze $e_1' = x_1 = (1,1,1)$, pa ga normiramo: $e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$.
Zatim izračunamo ortogonalnu projekciju e_2' drugog vektora x_2 iz baze na vektor e_1:

$$\begin{aligned} e_2' &= x_2 - (x_2|e_1)e_1 = (1,0,1) - \big((1,0,1)|(1,1,1)\big)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1)\cdot 2 = \frac{1}{3}(1,-2,1), \end{aligned}$$

te ga normiramo:

$$e_2 = \frac{1}{3}(1,-2,1)\cdot\frac{3}{\sqrt{6}} = (1,-2,1)\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

I na kraju pomoću e_1 i e_2 izračunamo ortonormiranu projekciju trećeg vektora iz početne baze na potprostor razapet s e_1 i e_2:

$$\begin{aligned} e_3' &= x_3 - (x_3|e_1)e_1 - (x_3|e_2)e_2 = (2,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= (2,0,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{2}{6}(1,-2,1) = (1,0,-1), \\ e_3 &= (1,0,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Konačno dobivamo ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$.

4 Unitarni operatori

Iz same definicije unitarnog prostora U vidimo da je svakom uređenom paru (x, y) vektora $x, y \in U$ pridružen skalar $(x, y) \in K$. Imamo li neku funkciju-operator A definiran na U s vrijednostima u U, jasno je da će općenito A mijenjati skalarni produkt, tj. bit će $(A(x)|A(y)) \neq (x|y)$. Tako npr. funkcija A, koja svakom vektoru pridružuje nulvektor mijenja skalarni produkt. S druge strane je od interesa da se nađu i po mogućnosti karakteriziraju svi operatori $M : U \to U$ za koje je

$$(M(x)|M(y)) = (x|y)$$

za sve $x, y \in U$. Treba očekivati da svi takvi operatori razapinju grupu s obzirom na koju su „geometrijska" svojstva unitarnog prostora invarijantna.

Budući da u rješavanju ovog problema treba razlikovati slučaj $dimU < \infty$ i slučaj beskonačno dimenzionalnog prostora, pretpostavimo da je $dimU < \infty$.

Definicija 7 *Operator $M : U \to U$, za koji vrijedi*

$$(M(x)|M(y)) = (x|y), \forall x, y \in U, \tag{6}$$

*zove se **unitaran operator**.*

4.1 Svojstva unitarnog operatora

Pokažimo najprije da je unitaran operator $M : U \to U$ linearan, tj. da vrijedi

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha Mx + \beta My$$

za sve $\alpha, \beta \in K, x, y \in U$.
Naime,

$$M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My \in Im(M), \tag{7}$$

gdje je $Im(M)$ slika operatora M (to je potprostor od U).
Za proizvoljno $z \in U$ imamo

$$\begin{aligned}
&(M(\alpha x + \beta y) - \alpha M(x) - \beta M(y)|M(z)) = \\
&= (M(\alpha x + \beta y)|M(z)) - \alpha(M(x)|M(z)) - \beta(M(y)|M(z)) \\
&= (\alpha x + \beta y|z) - \alpha(x|z) - \beta(y|z) = 0
\end{aligned}$$

jer M čuva skalarni produkt. Prema tome je

$$M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My \perp Im(M). \tag{8}$$

Iz (7) i (8) zaključujemo da je $M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My = 0$ jer $Im(M) \oplus Im(M)^{\perp} = U$.
Dakle, M je linearan operator.
Nadalje, zahtjev (6) je ekvivalentan zahtjevu $\|Mx\| = \|x\|, \forall x \in U$. Ovo se zove izometričnost. Dakle, unitarni operatori čuvaju normu vektora.

Također, zahtjev (6) implicira da je M injektivan operator.
Naime, ako je $Mx = 0$, onda zbog $\|Mx\| = \|x\|$ odmah slijedi da je i $x = 0$.
Štoviše, M je i surjektivan operator, tj. $Im(M) = U$. Zaista, za svaku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od U, vektori $Me_1, \ldots, Me_n$ linearno su nezavisni jer

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Me_k = 0$$

povlači

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Me_k|Mx) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k|x) = 0,$$

za sve $x \in U$. Uvrštavajući redom $x = e_1, \ldots, e_n$ u prethodni izraz dobivamo $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.Kako je $\{Me_1, \ldots, Me_n\}$ linearno nezavisan skup od n elemenata, to je $Im(M) = U$, pa linearan operator M preslika U na U.
Dakle, unitaran operator je bijektivan pa ima inverzni operator. Nadalje, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 8 *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $M \in L(U)$ linearan operator na U. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*
(1) M je unitaran.
(2) Za svaku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od U, skup $\{Me_1, \ldots, Me_n\}$ je ortonormirana baza za U.
(3) Postoji ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od U takva da je i skup $\{Me_1, \ldots, Me_n\}$ ortonormirana baza za U.

Prethodni teorem pokazuje da je i inverzni operator M^{-1} unitarnog operatora M, također unitaran. To je zato što i M^{-1} ortonormirane baze prevodi u ortonormirane baze, samo u obrnutom smjeru.

Za unitaran operator M na U vrijedi

$$(Mx|y) = (x|M^{-1}y), \forall x, y \in U. \tag{9}$$

Naime, za proizvoljan $x, y \in U$ postoji $v \in U$ tako da je $Mv = y$. Tada je $v = M^{-1}y$. Sada je

$$(Mx|y) = (Mx|Mv) = (x|v) = (x|M^{-1}y).$$

Teorem 9 *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $M \in L(U)$. Tada postoji jedinstveni operator $M^* \in L(U)$ takav da je*

$$(Mx|y) = (x|M^*y), \forall x, y \in U. \tag{10}$$

Operator M^* iz Teorema 9 zove se **adjungirani operator** operator M.
Iz (9) i (10) uočavamo da za unitaran operator M vrijedi $M^{-1} = M^*$.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] D. Butković, *Kompleksni konačnodimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2007.

[3] H.Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2008., skripta